Reinhold Fürth' s uncertainty relations in classical statistical mechanics

Paolo Muratore-Ginanneschi

Department of Mathematics and Statistics University of Helsinki

SISFA seminar 2024

Outline of the talk

1. Uncertainty relations: Quantum Mechanics
   - Heisenberg's uncertainty relations
   - Kennard and Robertson
   - Schödinger's quest for "Anschaulichkeit"
2. Enter Fürth
   - The paper
   - A biographical sketch
3. Uncertainty Relations in Classical Statistical Physics
4. Developments in Quantum Mechanics
5. Developments in Classical Statistical Mechanics
6. Open conclusions

Uncertainty relations: Quantum Mechanics

Heisenberg's 1927 paper

In Wheeler and Zurek, *Quantum Theory and Measurement*, (1983)
"The Physical Content of Quantum Kinematics and Mechanics"

Hilgevoord and Uffink, "The Uncertainty Principle", (2024)

Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.

Von **W. Heisenberg** in Kopenhagen.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 23. März 1927.)

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst exakte Definitionen der Worte: Ort, Geschwindigkeit, Energie usw. (z. B. des Elektrons) aufgestellt, die auch in der Quantenmechanik Gültigkeit behalten, und es wird gezeigt, daß kanonisch konjugierte Größen simultan nur mit einer charakteristischen Ungenauigkeit bestimmt werden können (§ 1). Diese Ungenauigkeit ist der eigentliche Grund für das Auftreten statistischer Zusammenhänge in der Quantenmechanik. Ihre mathematische Formulierung gelingt mittels der Dirac-Jordanschen Theorie (§ 2). Von den so gewonnenen Grundsätzen ausgehend wird gezeigt, wie die makroskopischen Vorgänge aus der Quantenmechanik heraus verstanden werden können (§ 3). Zur Erläuterung der Theorie werden einige besondere Gedankenexperimente diskutiert (§ 4).

"This indeterminacy is the real basis for the occurrence of statistical relations in quantum mechanics."

The interpretation of Kennard and Robertson

Kennard, “Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen”, *Zeitschrift für Physik*, (1927)
Robertson, “The Uncertainty Principle”, *Physical Review*, (1929)

The Uncertainty Principle

The uncertainty principle is one of the most characteristic and important consequences of the new quantum mechanics. This principle, as formulated by Heisenberg for two conjugate quantum-mechanical variables, states that the accuracy with which two such variables can be measured simultaneously is subject to the restriction that the product of the uncertainties in the two measurements is at least of order h (Planck's constant). Condon* has remarked that an uncertainty relation of this type can not hold in the general case where the two variables under consideration are not conjugate, and has stressed the desirability of obtaining a general formulation of the principle. It is the purpose of the present letter to give such a general formulation, and to apply it in particular to the case of angular momentum.

* E. U. Condon “Remarks on Uncertainty Principles” Science LXIX, p. 573 (May 31, 1929), and in conversations with the writer on this topic.

We define the “mean value” A_0 of an (Hermitean) operator A in a system whose state is described by the (normal) function ψ as

$$A_0=\int\bar{\psi}A\psi d\tau$$

where the integral is extended over the entire coordinate space. The Hermitean character of A (i.e.

$$\int\bar{\phi}A\psi d\tau=\int\bar{\psi}A\phi d\tau$$

for arbitrary ϕ, ψ) insures the reality of A_0. The “uncertainty” ΔA in the value of A is then defined, in accordance with statistical usage, as the root mean square of the deviation of A from this mean, i.e.

$$(\Delta A)^2=\int\bar{\psi}(A-A_0)^2\psi d\tau.$$

The uncertainty principle for two such variables A, B, *whose commutator* $AB-BA=hC/2\pi i$, *is expressed by*

$$\Delta A\cdot\Delta B\geqq h|C_0|/4\pi$$

i.e. the product of the uncertainties in A, B *is not less than half the absolute value of the mean of their commutator.*

Schödinger's quest for "Anschaulichkeit"

144 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 12. März 1931

Chetrite, Muratore-Ginanneschi, and Schwieger, *The European Physical Journal H*, (2021)

Über die Umkehrung der Naturgesetze.

Von E. Schrödinger.

Einleitung. Wenn für ein diffundierendes oder in Brownscher Bewegung begriffenes Teilchen die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Abszissenbereich $(x;\, x+dx)$ zur Zeit t_0

$$w(x,\, t_0)\, dx$$

gegeben ist,

$$w(x,\, t_0) = w_0(x)\,,$$

so ist sie für $t > t_0$ diejenige Lösung $w(x,\, t)$ der Diffusionsgleichung

$$D\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}\,, \qquad (1)$$

welche für $t = t_0$ der vorgegebenen Funktion $w_0(x)$ gleich wird. — Über

Enter Fürth

Fürth’s 1933 paper

L. Peliti & P.M.-G. arXiv:2006.03740 and Eur. Phys. J. H (2023) 48 :4

(Aus dem Physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag.)

Über einige Beziehungen zwischen klassischer Statistik und Quantenmechanik.

Von **Reinhold Fürth** in Prag.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 19. Januar 1933.)

Im folgenden soll von einigen Beziehungen zwischen der klassischen Statistik — der klassischen Diffusionstheorie und der Theorie der Brownschen Bewegung — einerseits und der Quantenmechanik andererseits die Rede sein, die sich aus formalen Gründen ergeben und, obwohl sie zum Teil manchem bekannt sein dürften, in diesem Zusammenhang meines Wissens noch nicht behandelt worden sind. Insbesondere läßt sich zeigen, daß sich die Heisenbergschen Unschärferelationen auch auf Vorgänge übertragen lassen, die von der klassischen Statistik beherrscht werden, und daß sich dadurch neue Gesichtspunkte zu der oft behandelten Frage nach der Grenze der Meßmöglichkeit mit einem Meßinstrument erbringen

UNIVERSITY OF HELSINKI

Reinhold Fürth: Prague

- Born on 20.10.1893 in Prague, (Bohemia, Austro-Hungarian empire)
- Gymnasium in Prague with emphasis on classical languages.
- 1912-16: Imperial German Charles Ferdinand University in Prague
  - Studies in experimental and theoretical physics, mathematics.
  - Introduced by Philipp Frank to relativity and Brownian motion
- 1920 first meeting with Einstein.
- 1922: F. explains the origin of measured deviations from Schottky shot noise theory: landmark in telephone and radio engineering development.
- 1922: F. edits collection of Einstein's papers on Brownian motion.
- 1933: "annus mirabilis"
  - "*Über einige Beziehungen zwischen klassischer Statistik und Quantenmechanik*", Zeitschrift für Physik, 81 143–162
  - "*Einige Bemerkungen zum Problem der Neutronen und positiven Elektronen*". Zeitschrift für Physik, 85(5-6):294–299

Reinhold Fürth: academic career

1920-38: Academic career at Prague's German University (notable colleagues: P. Frank, R. Carnap)

- 1920 Privatdozent
- 1927 he became *Aussenordentlicher Professor* in theoretical physics.
- 1931 full professor of experimental physics and Head of the physics department.
- 1937 Dean of the Faculty of Science
- 1938- Fall: "Munich agreement": F. forced to resign because non "aryan"
- 1939: Dismissal from University and escape to England.

Reinhold Fürth: UK years

- 1939-47 60 Grange Loan, Edinburgh
  - Closest collaborator of Max Born (84 Grange Loan)
  - Born, Fürth, and Pringle. "*A Photo-Electric Fourier Transformer*" Nature, 156:756–757
- 1943 fellow of the Royal Society.
- 1947 F. becomes British subject.
- 1947-61 Reader at Birbeck college London (until retirement)
- 1951 "*Physics of Social Equilibrium* " **BAAS** lecture & Nature 168:1048–1049
- 1965 Keith medal of the Royal Society of Edinburgh.

Physics of Social equilibrium's plea

free discussion ... education to independent thinking and ... mixing of population to take place

Overall production: 200 papers, several books and patents.

UNIVERSITY OF HELSINKI

Uncertainty Relations in Classical Statistical Mechanics

Fürth's 1933 main results

Fürth proves that

Durch Einführung der Bezeichnungen Δx und Δv in Analogie zu (21) schreiben wir unsere Unschärfebeziehung einfacher in der Gestalt

$$\Delta x \cdot \Delta v \geqq D, \tag{37}$$

die demnach aussagt, daß in einem klassisch diffundierenden Teilchenschwarm die Lagen und die Geschwindigkeiten der Teilchen in jedem Augenblick *gleichzeitig* nicht beliebig genau bestimmt sein können, daß vielmehr das Produkt der beiden Unschärfen stets größer als der Diffusionskoeffizient D sein muß.

Fürth argues that

Änderungsgeschwindigkeit von J sei $\dot{J}$. Es gilt dann

$$J = a x, \qquad \dot{J} = a \cdot \dot{x} = a v,$$

$$\Delta J = a \cdot \Delta x, \quad \Delta \dot{J} = a \Delta v$$

und daher mit Benutzung von (42)

$$\Delta J \cdot \Delta \dot{J} \approx a^2 \cdot D. \tag{43}$$

What does Fürth refer to when he writes Δv ?

$$\Delta x \Delta v \geq D$$

Δx :

mean square root of the position process

D :

Diffusion coefficient

Diffusion process in $\mathbb{R}^d$

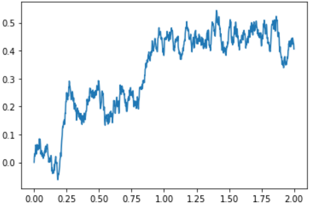
First and second order cumulants of the increments specify the dynamics:

- drift

$$\boldsymbol{b}_t(\boldsymbol{x}) = \lim_{s \searrow 0} \mathrm{E}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_{t+s} - \boldsymbol{\xi}_t}{s} \middle| \boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{x} \right)$$

- diffusion

$$\mathbb{D}_t(\boldsymbol{x}) = \lim_{s \searrow 0} \mathrm{E}\left(\frac{(\boldsymbol{\xi}_{t+s} - \boldsymbol{\xi}_t) \otimes (\boldsymbol{\xi}_{t+s} - \boldsymbol{\xi}_t)}{s} \middle| \boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{x} \right)$$



Free diffusion $\boldsymbol{b} = 0$

$$\Delta \boldsymbol{v} \neq \Delta \boldsymbol{b}$$

UNIVERSITY OF HELSINKI

Kolmogorov's dual picture of the dynamics

Forward evolution of densities ("Schrödinger picture"):

$$\partial_t \mathscr{T}_{t,s}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) + \partial_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{b}_t(\boldsymbol{x}) \mathscr{T}_{t,s}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \partial_{\boldsymbol{x}} \otimes \partial_{\boldsymbol{x}} \mathbb{D}_t(\boldsymbol{x}) \mathscr{T}_{t,s}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$$

$$p_t(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d y \, \mathscr{T}_{t,s}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \, p_s(\boldsymbol{y}) \qquad t \geq s$$

Backward evolution of observables ("Heisenberg picture"):

$$\partial_s \mathscr{T}_{t,s}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{b}_s(\boldsymbol{y}) \cdot \partial_{\boldsymbol{y}} \mathscr{T}_{t,s}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \mathbb{D}_s(\boldsymbol{y}) \partial_{\boldsymbol{y}} \otimes \partial_{\boldsymbol{y}} \mathscr{T}_{t,s}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = 0$$

$$\mathrm{E}\left(f(\boldsymbol{\xi}_t) \middle| \boldsymbol{\xi}_s = \boldsymbol{y}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d x f(\boldsymbol{x}) \mathscr{T}_{t,s}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \qquad t \geq s$$

$$\lim_{|t-s| \to 0} \mathscr{T}_{t,s}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \delta^d(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

in all cases

Time symmetric increments

Time reversal of Markov processes (Kolmogorov 1937)

Given $p_t(\boldsymbol{x})$ for all $t \in [0, T]$ and $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$

$$\mathscr{T}^{(R)}_{t,t+s}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\, p_{t+s}(\boldsymbol{x}) = \mathscr{T}_{t+s,t}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})\, p_t(\boldsymbol{y}) \qquad s > 0$$

Current velocity

$$\boldsymbol{v}_t(\boldsymbol{x}) = \lim_{s \searrow 0} \mathrm{E}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_{t+s} - \boldsymbol{\xi}_{t-s}}{2\,s} \middle| \boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{x} \right) \qquad \text{definition}$$

$$\equiv \lim_{s \searrow 0} \int \mathrm{d}^d y\, \boldsymbol{y}\, \frac{\mathscr{T}_{t+s,t}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) - \mathscr{T}^{(R)}_{t-s,t}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}{2\,s} \qquad \text{definition rewritten}$$

$$= \boldsymbol{b}_t(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2\,p_t(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \mathbb{D}_t(\boldsymbol{x})\, p_t(\boldsymbol{x}) \qquad \text{calculation}$$

Fürth's first result

$$
(\Delta \boldsymbol{\xi}_t)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d\boldsymbol{x}\, p_t(\boldsymbol{x}) \|\boldsymbol{x} - \mathrm{E}\, \boldsymbol{\xi}_t\|^2
$$

$$
(\Delta \boldsymbol{v}_t)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d\boldsymbol{x}\, p_t(\boldsymbol{x}) \|\boldsymbol{v}_t(\boldsymbol{x}) - \mathrm{E}\, \boldsymbol{v}_t(\boldsymbol{\xi}_t)\|^2
$$

Cauchy–Schwarz inequality

$$
(\Delta \boldsymbol{\xi}_t)^2 (\Delta \boldsymbol{v}_t)^2 \;\geq\; \left| \mathrm{E}\left(\boldsymbol{\xi}_t \cdot \boldsymbol{b}_t(\boldsymbol{\xi}_t)\right) - (\mathrm{E}\, \boldsymbol{\xi}_t) \cdot \mathrm{E}\, \boldsymbol{b}_t(\boldsymbol{\xi}_t) + \frac{1}{2}\, \mathrm{E}\, \mathrm{Tr}\, \mathbb{D}_t(\boldsymbol{\xi}_t) \right|^2
$$

Free diffusion

Uncertainty relation

Case of a generic observable

Mean forward derivative

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_{+} f_t(\boldsymbol{x}) &= \lim_{s \searrow 0} \mathrm{E}\left(\frac{f_{t+s}(\boldsymbol{\xi}_{t+s}) - f_t(\boldsymbol{\xi}_t)}{s} \middle| \boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{x} \right) \\
&= \left(\partial_t + \boldsymbol{b}_t(\boldsymbol{x}) \cdot \partial_{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \mathbb{D}_t(\boldsymbol{x}) \partial_{\boldsymbol{x}} \otimes \partial_{\boldsymbol{x}} \right) f_t(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

Time symmetric derivative

$$
\mathrm{D} f_t(\boldsymbol{x}) := \lim_{s \searrow 0} \mathrm{E}\left(\frac{f_{t+s}(\boldsymbol{\xi}_{t+s}) - f_{t-s}(\boldsymbol{\xi}_{t-s})}{2\, s} \middle| \boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{x} \right) = \Big(\partial_t + \boldsymbol{v}_t(\boldsymbol{x}) \cdot \partial_{\boldsymbol{x}} \Big) f_t(\boldsymbol{x})
$$

$$
\boldsymbol{v}_t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}_t(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2\, p_t(\boldsymbol{x})} \partial_{\boldsymbol{x}} \Big(\mathbb{D}_t(\boldsymbol{x})\, p_t(\boldsymbol{x}) \Big)
$$

Fürth's second result

$$\left(\Delta f_t(\boldsymbol{\xi}_t)\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d\boldsymbol{x}\, p_t(\boldsymbol{x}) \left(f_t(\boldsymbol{x}) - \mathrm{E} f_t(\boldsymbol{\xi}_t)\right)^2$$

$$\left(\Delta\, \mathrm{D} f_t(\boldsymbol{\xi}_t)\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d\boldsymbol{x}\, p_t(\boldsymbol{x}) \left(\mathrm{D} f_t(\boldsymbol{x}) - \mathrm{E}\,\mathrm{D} f_t(\boldsymbol{\xi}_t)\right)^2$$

Cauchy–Schwarz inequality

$$\left(\Delta f_t(\boldsymbol{\xi}_t)\right)^2 \left(\Delta\, \mathrm{D} f_t(\boldsymbol{\xi}_t)\right)^2 \geq$$

$$\left|\mathrm{E}\left(f_t(\boldsymbol{\xi}_t)\mathrm{D}_+ f_t(\boldsymbol{\xi}_t) - f_t(\boldsymbol{\xi}_t)\,\mathrm{E}\,\mathrm{D}_+ f_t(\boldsymbol{\xi}_t) + \frac{1}{2}(\partial_{\boldsymbol{\xi}_t} f_t)(\boldsymbol{\xi}_t) \cdot \mathbb{D}_t(\boldsymbol{\xi}_t) \cdot \partial_{\boldsymbol{\xi}_t} f_t(\boldsymbol{\xi}_t)\right)\right|^2$$

Uncertainty relation when f is a martingale

$\mathrm{D}_+ f_t(\boldsymbol{x}) = 0$ (physically: statistical conservation law)

Fürth on precision limits of the classical measurement

- Uncertainty relations for diffusion processes: Brownian motion is continuous but nowhere differentiable. Increasing the resolution of the position observation reveals the ill-defined velocity.
- More accurate measurements only by decreasing the diffusion coefficient (e.g. low temperature!).
- Assigning a position probability distribution via a position probability amplitude is a way to "encode information" about velocities (as it appears in Ehrenfest's theorem).

Developments in Quantum Mechanics

Stochastic mechanics: Fényes

Zeitschrift für Physik, Bd. 132, S. 81—106 (1952).

Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung und Interpretation der Quantenmechanik.

Von

Imre Fényes.

(Eingegangen am 30. Januar 1952.)

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind kurz zusammengefaßt die folgenden: Auch für Markoffsche Prozesse bestehen gewisse Unbestimmtheitsrelationen. Auch den Markoffschen Prozessen kann eine gewisse Wahrscheinlichkeits-Amplitudenfunktion zugeordnet werden. Die Fokkersche Gleichung behält ihre Gültigkeit auch in der Quantenmechanik. Die Relation von Heisenberg ist ein spezieller Fall der Unbestimmtheitsrelation der Markoffschen Prozesse. Die wellenmecha-

Bridge relation?

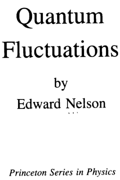
Fokker-Planck becomes mass continuity:

$$0 = \partial_t \wp_t(\boldsymbol{x}) + \partial_{\boldsymbol{x}} \cdot \wp_t(\boldsymbol{x}) \overbrace{\left(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, s) - \frac{1}{2\, \wp_t(\boldsymbol{x})} \partial_{\boldsymbol{x}} \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, s) \wp_t(\boldsymbol{x}) \right)}^{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)}$$

Remark (Fényes 1952): If $\psi(x, t)$ satisfies the Schrödinger equation

$$\wp_t(\boldsymbol{x}) = |\psi(x, t)|^2 \qquad \& \qquad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \operatorname{Im} \psi^*(x, t) \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \psi(x, t)$$

Stochastic mechanics: Nelson


Quantum
Fluctuations
by
Edward Nelson

Princeton Series in Physics

Repeated measurement and non-locality

stochastic mechanical drifts are functionals of the state (which is not the case in the classical theory of diffusion),

Grabert, Hänggi, and Talkner, “Is quantum mechanics equivalent to a classical stochastic process?”, *Physical Review A*, (1979)

Blanchard, Golin, and Serva, “Repeated measurements in stochastic mechanics”, *Physical Review D*, (1986)

Developments in Classical Statistical Mechanics

Stochastic thermodynamics

Stochastic Thermodynamics

A Gentle Introduction

Luca Peliti & Simone Pigolotti

8 Developments **140**

8.1 Stochastic efficiency 140

8.2 Uncertainty relations 143

8.3 Examples of uncertainty relations 147

8.4 First-passage times 149

Current velocity controls the entropy production

Average entropy production of a thermodynamic process:

$$\mathcal{S}_{t_f, t_i} \propto \mathrm{E} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \, \|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}_t, t)\|^2 \geq 0$$

Gawędzki, "Fluctuation Relations in Stochastic Thermodynamics", *arXiv:1308.1518*, (2013)

Fürth inequality translates into an inequality for the flux of the entropy production

Muratore-Ginanneschi and Peliti, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, (2023)

Open conclusions

- Are uncertainty relations really the real basis for the occurrence of statistical relations in Quantum Mechanics?

Busch, Lahti, and Werner, “Colloquium: Quantum root-mean-square error and measurement uncertainty relations”, *Reviews of Modern Physics*, (2014)
Hilgevoord and Uffink, “The Uncertainty Principle”, (2024)

Thanks!!!